Matematický software

Zápočtový dokument

**Jméno:** Martin Renner

**Kontaktní email:** st98415@students.ujep.cz

**Datum odevzdání:** 14.9.2023

**Odkaz na repozitář:** https://github.com/martinrenner/MSW

# Formální požadavky

**Cíl předmětu:**

Cílem předmětu je ovládnout vybrané moduly a jejich metody pro jazyk Python, které vám mohou být užitečné jak v dalších semestrech vašeho studia, závěrečné práci (semestrální, bakalářské) nebo technické a výzkumné praxi.

**Získání zápočtu:**

Pro získání zápočtu je nutné částečně ovládnout alespoň polovinu z probraných témat. To prokážete vyřešením vybraných úkolů. V tomto dokumentu naleznete celkem 10 zadání, která odpovídají probíraným tématům. Vyberte si 5 zadání, vypracujte je a odevzdejte. Pokud bude všech 5 prací korektně vypracováno, pak získáváte zápočet. Pokud si nejste jisti korektností vypracování konkrétního zadání, pak je doporučeno vypracovat více zadání a budou se započítávat také, pokud budou korektně vypracované.

**Korektnost vypracovaného zadání:**

Konkrétní zadání je považováno za korektně zpracované, pokud splňuje tato kritéria:

1. Použili jste numerický modul pro vypracování zadání místo obyčejného pythonu
2. Kód neobsahuje syntaktické chyby a je interpretovatelný (spustitelný)
3. Kód je čistý (vygooglete termín clean code) s tím, že je akceptovatelné mít ho rozdělen do Jupyter notebook buněk (s tímhle clean code nepočítá)

**Forma odevzdání:**

Výsledný produkt odevzdáte ve dvou podobách:

1. Zápočtový dokument
2. Repozitář s kódem

Zápočtový dokument (vyplněný tento dokument, který čtete) bude v PDF formátu. V řešení úloh uveďte důležité fragmenty kódu a grafy/obrázky/textový výpis pro ověření funkčnosti. Stačí tedy uvést jen ty fragmenty kódu, které přispívají k jádru řešení zadání. Kód nahrajte na veřejně přístupný repozitář (github, gitlab) a uveďte v práci na něj odkaz v titulní straně dokumentu. Strukturujte repozitář tak, aby bylo pro nás hodnotitele intuitivní se vyznat v souborech (doporučuji každou úlohu dát zvlášť do adresáře).

**Podezření na plagiátorství:**

Při podezření na plagiátorství (významná podoba myšlenek a kódu, která je za hranicí pravděpodobnosti shody dvou lidí) budete vyzváni k fyzickému dostavení se na zápočet do prostor univerzity, kde dojde k vysvětlení podezřelých partií, nebo vykonání zápočtového testu na místě z matematického softwaru v jazyce Python.

**Kontakt:**

Při nejasnostech ohledně zadání nebo formě odevzdání se obraťte na vyučujícího.

# 1. Knihovny a moduly pro matematické výpočty

**Zadání:**

V tomto kurzu jste se učili s některými vybranými knihovnami. Některé sloužily pro rychlé vektorové operace, jako numpy, některé mají naprogramovány symbolické manipulace, které lze převést na numerické reprezentace (sympy), některé mají v sobě funkce pro numerickou integraci (scipy). Některé slouží i pro rychlé základní operace s čísly (numba).

Vaším úkolem je změřit potřebný čas pro vyřešení nějakého problému (např.: provést skalární součin, vypočítat určitý integrál) pomocí standardního pythonu a pomocí specializované knihovny. Toto měření proveďte alespoň pro 5 různých úloh (ne pouze jiná čísla, ale úplně jiné téma) a minimálně porovnejte rychlost jednoho modulu se standardním pythonem. Ideálně proveďte porovnání ještě s dalším modulem a snažte se, ať je kód ve standardním pythonu napsán efektivně. ​

**Řešení:**

V rámci řešení této úlohy jsem se rozhodl řešit následující problémy, tak že jsem porovnával výkon klasického Pythonu a matematické knihovny NumPy:

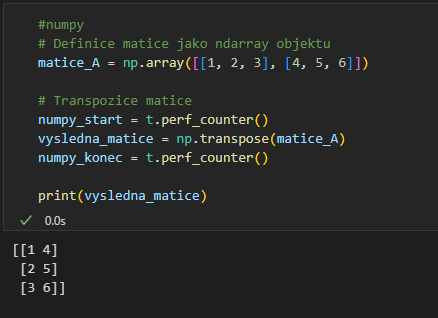
1. Součet matic
2. Násobení matice konstantou
3. Transpozice matice
4. Nalezení kořenu kvadratické rovnice
5. Výpočet průměru prvků v matici

Ukázka kódu transpozice matice:

1. Python

Obsah obrázku text, snímek obrazovky, software, displej

Popis byl vytvořen automaticky

1. Numpy
2. Obsah obrázku text, snímek obrazovky, Písmo

   Popis byl vytvořen automatickyObsah obrázku text, snímek obrazovky, Písmo, software

   Popis byl vytvořen automatickyNaměřené hodnoty

Celkové naměřené hodnoty:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Problém | Python (čas) | Numpy (čas) |
| Součet matic | 0.0000342000 | 0.0000388000 |
| Násobení matice konstantou | 0.0000329000 | 0.0000462000 |
| Transpozice matice | 0.0000322000 | 0.0000405000 |
| Nalezení kořenu kořenu kvadratické rovnice | 0.0000344000 | 0.0002234000 |
| Výpočet průměru prvků v matici | 0.0000309000 | 0.0000852000 |

Z dat v tabulce lze vyčíst, že moje vlastní implementace byla v těchto úkolech rychlejší. Tento rozdíl v rychlosti je velmi pravděpodobně způsoben tím, že ukázka pracovala s malým množstvím dat, což neumožnilo plně využít rychlosti knihovny NumPy, která je optimalizována pro zpracování větších datových souborů a výpočetně náročné operace.

# 2. Vizualizace dat

**Zadání:**

V jednom ze cvičení jste probírali práci s moduly pro vizualizaci dat. Mezi nejznámější moduly patří matplotlib (a jeho nadstavby jako seaborn), pillow, opencv, aj. Vyberte si nějakou zajímavou datovou sadu na webovém portále Kaggle a proveďte datovou analýzu datové sady. Využijte k tomu různé typy grafů a interpretujte je (minimálně alespoň 5 zajímavých grafů)​. Příklad interpretace: z datové sady pro počasí vyplynulo z liniového grafu, že v létě je vyšší rozptyl mezi minimální a maximální hodnotou teploty. Z jiného grafu vyplývá, že v létě je vyšší průměrná vlhkost vzduchu. Důvodem vyššího rozptylu může být absorpce záření vzduchem, který má v létě vyšší tepelnou kapacitu.

**Řešení:**

Ze seznamu dostupných datových sad na portálu Kaggle jsem si vybral dataset týkající se automobilů nabízených na trhu v Německu. Pro odkaz na tento dataset můžete navštívit následující adresu <https://www.kaggle.com/datasets/ander289386/cars-germany>

Naimplementované datové analýzy:

1. Podíl paliv prodaných aut

Obsah obrázku text, diagram, snímek obrazovky, kruh

Popis byl vytvořen automaticky

* Z grafu je patrné, že v průběhu zkoumaného období byla většina automobilů nabízených v Německu poháněna buď benzínovými nebo dieselovými motory.
* Obsah obrázku text, snímek obrazovky, Písmo

  Popis byl vytvořen automatickyZdrojové kódy k ostatním grafům lze nalézt online na mém GitHubu. Odkaz na titulní stránce.

1. Obsah obrázku text, snímek obrazovky, diagram, Vykreslený graf

   Popis byl vytvořen automatickyPočet nabízených modelů každého výrobce

* Z druhého grafu je zřejmé, že automobilka Mercedes-Benz nabízela největší množství unikátních modelů v porovnání s ostatními výrobci automobilů.

1. Obsah obrázku text, řada/pruh, Vykreslený graf, diagram

   Popis byl vytvořen automatickyVývoj prodeje převodovek

* Ve třetím grafu je zřejmý pokles zájmu o manuální převodovky v posledních letech, zatímco zájem o automatické převodovky téměř neustále rostl.

1. Obsah obrázku text, číslo, diagram, Paralelní

   Popis byl vytvořen automatickyVývoj distribuce výkonu automobilů

* Graf výše poskytuje přehled o distribuci výkonu automobilů v průběhu několika posledních let.

1. Obsah obrázku text, řada/pruh, Vykreslený graf, diagram

   Popis byl vytvořen automatickyVývoj průměrné ceny auta značky Volkswagen

* Z posledního grafu lze vyčíst, jak se v průběhu posledních let měnila průměrná cena vozu značky Volkswagen.

# 3. Úvod do lineární algebry

**Zadání:**

Důležitou částí studia na přírodovědecké fakultě je podobor matematiky zvaný lineární algebra. Poznatky tohoto oboru jsou základem pro oblasti jako zpracování obrazu, strojové učení nebo návrh mechanických soustav s definovanou stabilitou. Základní úlohou v lineární algebře je nalezení neznámých v soustavě lineárních rovnic. Na hodinách jste byli obeznámeni s přímou a iterační metodou pro řešení soustav lineárních rovnic. Vaším úkolem je vytvořit graf, kde na ose x bude velikost čtvercové matice a na ose y průměrný čas potřebný k nalezení uspokojivého řešení. Cílem je nalézt takovou velikost matice, od které je výhodnější využít iterační metodu.

**Řešení:**

doplňte

# 

# 4. Interpolace a aproximace funkce jedné proměnné

**Zadání:**

Během měření v laboratoři získáte diskrétní sadu dat. Často potřebujete data i mezi těmito diskrétními hodnotami a to takové, které by nejpřesněji odpovídaly reálnému naměření. Proto je důležité využít vhodnou interpolační metodu. Cílem tohoto zadání je vybrat si 3 rozdílné funkce (např. polynom, harmonická funkce, logaritmus), přidat do nich šum (trošku je v každém z bodů rozkmitejte), a vyberte náhodně některé body. Poté proveďte interpolaci nebo aproximaci funkce pomocí alespoň 3 rozdílných metod a porovnejte, jak jsou přesné. Přesnost porovnáte s daty, které měly původně vyjít. Vhodnou metrikou pro porovnání přesnosti je součet čtverců (rozptylů), které vzniknou ze směrodatné odchylky mezi odhadnutou hodnotou a skutečnou hodnotou.

**Řešení:**

doplňte

# 5. Hledání kořenů rovnice

**Zadání:**

Vyhledávání hodnot, při kterých dosáhne zkoumaný signál vybrané hodnoty je důležitou součástí analýzy časových řad. Pro tento účel existuje spousta zajímavých metod. Jeden typ metod se nazývá ohraničené (například metoda půlení intervalu), při kterých je zaručeno nalezení kořenu, avšak metody typicky konvergují pomalu. Druhý typ metod se nazývá neohraničené, které konvergují rychle, avšak svojí povahou nemusí nalézt řešení (metody využívající derivace). Vaším úkolem je vybrat tři různorodé funkce (například polynomiální, exponenciální/logaritmickou, harmonickou se směrnicí, aj.), které mají alespoň jeden kořen a nalézt ho jednou uzavřenou a jednou otevřenou metodou. Porovnejte časovou náročnost nalezení kořene a přesnost nalezení.

**Řešení:**

Obsah obrázku text, snímek obrazovky, Písmo

Popis byl vytvořen automatickyŘešené funkce:

Výsledná tabulka:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Funkce | Metoda řešení | Kořen | Čas |
| Polynomická funkce | Půlení intervalu | -0.6917885248094535 | 0.00012829999468522146 |
| Newtonova metoda | -0.6917885248094606 | 0.0004890999989584088 |
| Logaritmická funkce | Půlení intervalu | -0.714285714284415 | 0.00010929999552899972 |
| Newtonova metoda | -0.7142857142857143 | 0.0003616999965743162 |
| Harmonická funkce | Půlení intervalu | 0.7937005259827856 | 0.0001142999972216785 |
| Newtonova metoda | 0.7937005259840998 | 0.00028079999901819974 |

Implementace:

Obsah obrázku text, snímek obrazovky, Písmo

Popis byl vytvořen automatickyObsah obrázku text, snímek obrazovky, Písmo

Popis byl vytvořen automaticky

* Z dat v tabulce lze usoudit, že obě metody poskytly podobné kořenové hodnoty pro každou z funkcí. Nicméně Newtonova metoda vyžadovala více výpočetního času než metoda půlení intervalu. Tento rozdíl v čase lze vysvětlit tím, že Newtonova metoda vyžaduje přesnější počáteční odhad kořene a často vyžaduje více iterací k dosažení konvergence, zatímco metoda půlení intervalu je robustnější a méně citlivá na počáteční odhad, což znamená méně iterací pro nalezení kořene.

# 6. Generování náhodných čísel a testování generátorů

**Zadání:**

Tento úkol bude poněkud kreativnější charakteru. Vaším úkolem je vytvořit vlastní generátor semínka do pseudonáhodných algoritmů. Jazyk Python umí sbírat přes ovladače hardwarových zařízení různá fyzická a fyzikální data. Můžete i sbírat data z historie prohlížeče, snímání pohybu myší, vyzvání uživatele zadat náhodné úhozy do klávesnice a jiná unikátní data uživatelů.

**Řešení:**

Pro řešení této úlohy jsem zvolil sledování pohybu myši na obrazovce k vygenerování náhodného semínka. Algoritmus pravidelně zaznamenává aktuální polohu kurzoru každých 0,1 sekundy po dobu 10 sekund. Na závěr je semínko vygenerováno zahashováním dlouhého seznamu těchto zaznamenaných poloh kurzoru. Tímto způsobem dosahuji zjednodušení výsledného semínka, a také to že i malá změna v zaznamenaných souřadnicích vyvolá velkou změnu semínka.

Obsah obrázku text, snímek obrazovky, Písmo

Popis byl vytvořen automatickyObsah obrázku text, snímek obrazovky, Písmo, software

Popis byl vytvořen automatickyImplementace:

* Použitím jednou vygenerovaného semínka vícekrát je vždy získána stejná posloupnost náhodných čísel. Toto chování je důležité, protože semínko inicializuje generátor náhodných čísel a zajišťuje deterministický a opakovatelný výstup.

# 7. Metoda Monte Carlo

**Zadání:**

Metoda Monte Carlo představuje rodinu metod a filozofický přístup k modelování jevů, který využívá vzorkování prostoru (například prostor čísel na herní kostce, které mohou padnout) pomocí pseudonáhodného generátoru čísel. Jelikož se jedná spíše o filozofii řešení problému, tak využití je téměř neomezené. Na hodinách jste viděli několik aplikací (optimalizace portfolia aktiv, řešení Monty Hall problému, integrace funkce, aj.). Nalezněte nějaký zajímavý problém, který nebyl na hodině řešen, a získejte o jeho řešení informace pomocí metody Monte Carlo. Můžete využít kódy ze sešitu z hodin, ale kontext úlohy se musí lišit.

**Řešení:**

doplňte

# 8. Derivace funkce jedné proměnné

**Zadání:**

Numerická derivace je velice krátké téma. V hodinách jste se dozvěděli o nejvyužívanějších typech numerické derivace (dopředná, zpětná, centrální). Jedno z neřešených témat na hodinách byl problém volby kroku. V praxi je vhodné mít krok dynamicky nastavitelný. Algoritmům tohoto typu se říká derivace s adaptabilním krokem. Cílem tohoto zadání je napsat program, který provede numerickou derivaci s adaptabilním krokem pro vámi vybranou funkci. Proveďte srovnání se statickým krokem a analytickým řešením.

**Řešení:**

doplňte

# 

# 9. Integrace funkce jedné proměnné

**Zadání:**

V oblasti přírodních a sociálních věd je velice důležitým pojmem integrál, který představuje funkci součtů malých změn (počet nakažených covidem za čas, hustota monomerů daného typu při posouvání se v řetízku polymeru, aj.). Integraci lze provádět pro velmi jednoduché funkce prostou Riemannovým součtem, avšak pro složitější funkce je nutné využít pokročilé metody. Vaším úkolem je vybrat si 3 různorodé funkce (polynom, harmonická funkce, logaritmus/exponenciála) a vypočíst určitý integrál na dané funkci od nějakého počátku do nějakého konečného bodu. Porovnejte, jak si každá z metod poradila s vámi vybranou funkcí na základě přesnosti vůči analytickému řešení.

**Řešení:**

Obsah obrázku text, snímek obrazovky, Písmo

Popis byl vytvořen automatickyŘešené funkce:

Výsledná tabulka:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Funkce | | Druh řešení | Řešení |
| Polynomická funkce | Analytické řešení (WolframAlpha) | |  |
| Adaptivní metoda | | 6.916666666666667 |
| Lichoběžníková metoda | | 6.916925 |
| Simpson | | 6.916666666666667 |
| Romberg | | 6.916666666666667 |
| Logaritmická funkce | Analytické řešení (WolframAlpha) | |  |
| Adaptivní metoda | | 0.9818157902823592 |
| Lichoběžníková metoda | | 0.9818133883291631 |
| Simpson | | 0.9818157902520076 |
| Romberg | | 0.9818157902694467 |
| Harmonická funkce | Analytické řešení (WolframAlpha) | |  |
| Adaptivní metoda | | -0.2414643935364238 |
| Lichoběžníková metoda | | -0.24144245328374955 |
| Simpson | | -0.24146439629036023 |
| Romberg | | -0.24146439353648358 |

Obsah obrázku text, snímek obrazovky, Písmo

Popis byl vytvořen automatickyImplementace\.

- Celkově řečeno, výsledky těchto různých numerických metod ukazují různé aproximace hodnoty integrálu. Rozdíly mezi výsledky mohou být způsobeny různými přístupy a přesností jednotlivých metod.

# 10. Řešení obyčejných diferenciálních rovnic

**Zadání:**

Diferenciální rovnice představují jeden z nejdůležitějších nástrojů každého přírodovědně vzdělaného člověka pro modelování jevů kolem nás. Vaším úkolem je vybrat si nějakou zajímavou soustavu diferenciálních rovnic, která nebyla zmíněna v sešitech z hodin a pomocí vhodné numerické metody je vyřešit. Řešením se rozumí vizualizace jejich průběhu a jiných zajímavých informací, které lze z rovnic odvodit. Proveďte také slovní okomentování toho, co lze z grafu o modelovaném procesu vyčíst.

**Řešení:**

doplňte